ANNEE 1981

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE A OPTION

MATHEMATIQUES

(durée : 3 h 00 - coefficient : 9)

----==oOOo==----

Le choix de la première épreuve à option est laissé à l'initiative de chaque candidat au moment du déroulement de cette composition. Ce choix implique impérativement une option correspondante lors de la deuxième épreuve à option et plus tard lors des épreuves orales avec leurs coefficients respectifs.

Ainsi, le candidat qui choisit l'épreuve de Mathématiques commune M - P devra nécessairement composer en Mathématiques (programme M) ou Sciences physiques (programme P) lors de la deuxième épreuve à option ; de façon analogue, celui qui choisit l'épreuve de Mathématiques commune T - TA devra nécessairement composer en Technologie T (programme spécifique T) ou en Technologie TA (programme spécifique TA) lors de la deuxième épreuve à option.

----==oOOo==----

T.S.V.P.

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES M - P

La composition comprend deux problèmes indépendants.

PROBLEME I

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur les réels. Le problème étudie les sous ensembles de E sur lesquels la multiplication des matrices confère une structure de groupe.
On appellera groupe de matrices un tel groupe.
Parmi ces groupes de matrices figurent évidemment le groupe des matrices inversibles, et ses sous groupes.
On les appellera groupes classiques.

Pour tout groupe non classique, on appellera matrice pseudo-unité, matrice pseudo-inverse d'une matrice du groupe, l'élément unité - l'élément inverse d'un élément - pour la structure de groupe considérée.

I) Soient les 3 ensembles suivants :

1°) E_1 est l'ensemble singleton $E_1 = \{M\}$

où $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

2°) E_2 est l'ensemble des matrices de E de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \\ \vdots & & \vdots & (0) \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \\ (0) & & & (0) \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} A_k & (0) \\ (0) & (0) \end{bmatrix} \qquad (k < n)$$

dans lesquelles A_k est une matrice d'ordre k inversible (au sens classique) dans l'ensemble de ces matrices.

3°) E_3 est l'ensemble des matrices de la forme

$$k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

Montrer que ces 3 ensembles sont le support de 3 groupes non classiques.

On précisera pour chacun : la matrice pseudo-unité ; la matrice pseudo-inverse d'une matrice du groupe.

II) Soit un groupe de matrices (classique ou non).
Montrer que : ou bien toutes ses matrices sont régulières, ou bien aucune matrice n'est régulière au sens classique.

III) Montrer que dans un groupe de matrices (classique ou non) toutes les matrices sont de même rang.

IV) Soient A et B deux matrices semblables de E.
Montrer que si A appartient à un groupe de matrices, B appartient à un groupe isomorphe.

PROBLEME 2

Dans ce problème, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sera désigné par $\vec{u} . \vec{v}$.

On rappelle qu'une matrice orthogonale M est caractérisée par ${}^tM = M^{-1}$.

${}^tM$ étant la matrice transposée.

I) Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien, de dimension finie.
f et g sont deux endomorphismes de E.
On suppose que, rapportée à une base orthonormée de E :
la matrice A de f est symétrique,
la matrice B de g est antisymétrique.

1°) Montrer que pour toute autre base orthonormée, la matrice de f reste symétrique, la matrice de g reste antisymétrique.

2°) $\vec{x}$ et $\vec{y}$ étant deux vecteurs quelconques de E, comparer les deux produits scalaires:

$$\vec{x} \cdot g(\vec{y}) \qquad \text{et} \qquad \vec{y} \cdot g(\vec{x})$$

On conseille d'utiliser la forme matricielle du produit scalaire, en utilisant la matrice colonne et la matrice ligne d'un vecteur $\vec{x}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad {}^tX = \begin{bmatrix} x_1 \ldots\ldots\ldots x_n \end{bmatrix}$$

Que peut-on en conclure pour les vecteurs $\vec{x}$ et $g(\vec{x})$?

En déduire que g n'a qu'une seule valeur propre réelle possible.

Montrer que si E est de dimension impaire, g admet effectivement cette valeur propre.

II) Les notations et hypothèses précédentes étant vérifiées, on suppose de plus deux hypothèses supplémentaires.

a) f est un automorphisme.

b) f et g commutent : $f \circ g = g \circ f$

1°) Comparer les produits scalaires

$$f(\vec{x}) \cdot g(\vec{y}) \qquad \text{et} \qquad f(\vec{y}) \cdot g(\vec{x})$$

Que peut-on en conclure pour $f(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$?

2°) Soient les deux endomorphismes.

$\varphi = f + g$

$\psi = f - g$

Montrer que φ et ψ sont deux automorphismes .

(On pourra chercher $\ker \varphi$ et $\ker \psi$)

3°) Montrer que $\varphi \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ \varphi^{-1}$ sont deux transformations orthogonales.

4°) Soit $(\vec{e_1}, \ldots\ldots, \vec{e_n})$ la base orthonormée pour laquelle f a pour matrice A, g pour matrice B.

On pose : $\vec{\varepsilon_1} = \varphi(\vec{e_1}), \ldots\ldots\ldots, \quad \vec{\varepsilon_n} = \varphi(\vec{e_n})$

Montrer que pour la nouvelle base $(\vec{\varepsilon_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{\varepsilon_n})$,

f a toujours pour matrice A, g a toujours pour matrice B.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail